

TP 10

Graphes

1 Cours d'horizon

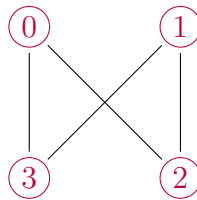
- Tracer (sur papier) le graphe dont la liste des listes d'adjacence est la suivante :

| $L = [[1], [0, 1, 3, 4], [1, 3], [2], [0, 3]]$

Que renvoie l'instruction suivante ?

| $L[2]$

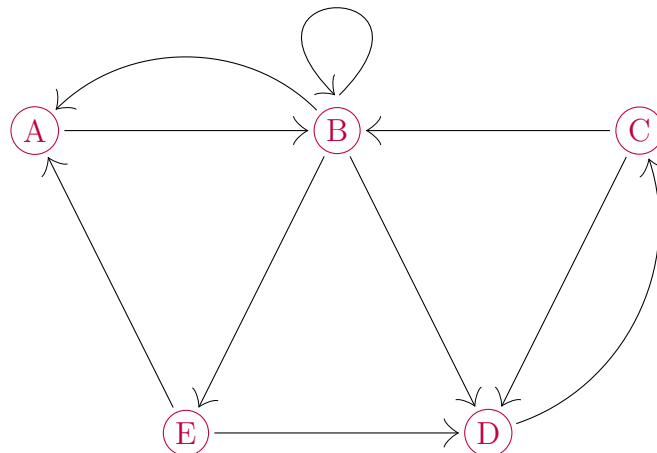
- Donner (et définir dans la console) la matrice d'adjacence du graphe non orienté suivant.



- Tracer (sur papier) le graphe dont la matrice d'adjacence est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

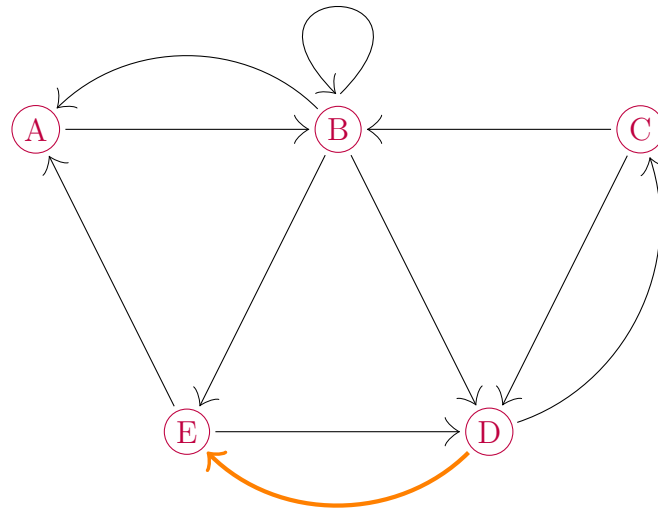
- Donner (et définir dans la console) le dictionnaire d'adjacence du graphe suivant.



Quelles instructions doit-on écrire pour obtenir

- ★ la liste des sommets vers lesquels pointe le sommet B ;
- ★ la liste des sommets du graphe ?

Modifier le dictionnaire d'adjacence (sans le réécrire en entier) afin d'ajouter une arête du sommet D vers le sommet E et donc d'obtenir le graphe suivant.



2 Exercices

2.1 Représentation informatique des graphes

Exercice 1 — Sommets et arêtes

Écrire des fonctions qui prennent en argument la matrice d'adjacence d'un graphe orienté et qui renvoient :

1. le nombre de sommets du graphe ;
2. la liste des sommets du graphe ;
3. le nombre d'arêtes du graphe.

Exercice 2 — Degrés entrant et sortant d'un sommet

Dans un graphe orienté, le **degré sortant** d'un sommet s est le nombre de successeurs de s , c'est-à-dire le nombre de sommets t tels qu'il existe une arête du sommet s vers le sommet t .

De même, le **degré entrant** d'un sommet s est le nombre de prédécesseurs de s , c'est-à-dire le nombre de sommets t tels qu'il existe une arête du sommet t vers le sommet s .

1. Écrire une fonction qui prend en arguments un graphe orienté et un sommet s du graphe, et qui renvoie le degré sortant du sommet s
 - (a) dans le cas où le graphe est donné par listes d'adjacence ;
 - (b) dans le cas où le graphe est décrit par sa matrice d'adjacence.
2. Écrire une fonction qui prend en arguments la matrice d'adjacence d'un graphe orienté et un sommet s du graphe, et qui renvoie la liste des successeurs du sommet s .
3. Écrire une fonction qui prend en arguments un graphe orienté et un sommet s du graphe, et qui renvoie le degré entrant du sommet s
 - (a) dans le cas où le graphe est donné par listes d'adjacence ;
 - (b) dans le cas où le graphe est décrit par sa matrice d'adjacence.

4. Écrire une fonction qui prend en arguments un graphe orienté et un sommet s du graphe, et qui renvoie la liste des prédécesseurs du sommet s
 - (a) dans le cas où le graphe est donné par listes d'adjacence ;
 - (b) dans le cas où le graphe est décrit par sa matrice d'adjacence.

Exercice 3 — Conversions

Dans cet exercice, on supposera que les sommets des graphes sont toujours numérotés par des entiers (en partant de zéro).

1. Écrire une fonction qui prend en argument la liste des listes d'adjacence d'un graphe orienté et qui renvoie la matrice d'adjacence du graphe.
2. Écrire une fonction qui prend en argument la matrice d'adjacence d'un graphe orienté et qui renvoie la liste des listes d'adjacence du graphe.

Exercice 4 — Pour quelques arêtes de plus

1. Écrire une fonction qui prend en argument un graphe orienté et qui ajoute au graphe un nouveau sommet **isolé**, c'est-à-dire un nouveau sommet qui n'est relié à aucun autre
 - (a) dans le cas où le graphe est représenté par un dictionnaire d'adjacence ;
 - (b) dans le cas où le graphe est représenté par une liste de listes d'adjacence ;
 - (c) dans le cas où le graphe est représenté par sa matrice d'adjacence.
2. Écrire une fonction qui prend en arguments un graphe non orienté et deux sommets du graphe non voisins, et qui ajoute au graphe une arête reliant ces deux sommets
 - (a) dans le cas où le graphe est représenté par sa matrice d'adjacence ;
 - (b) dans le cas où le graphe est représenté par un dictionnaire d'adjacence.

2.2 Parcours en largeur

Exercice 5 — Version matricielle

Implémenter le parcours en largeur pour un graphe donné par sa matrice d'adjacence.

Plus précisément, écrire une fonction qui prend en arguments un graphe donné par sa matrice d'adjacence et un sommet s du graphe, et qui renvoie la liste de tous les sommets du graphe accessibles par un chemin depuis le sommet s , dans l'ordre du parcours en largeur.

Dans les exercices qui suivent, on pourra, au choix, représenter les graphes soit par leur matrice d'adjacence, soit par un dictionnaire ou une liste de listes d'adjacence.

Exercice 6 — Connexité

1. Écrire une fonction qui prend en arguments un graphe orienté et deux sommets s et t du graphe, et qui détermine s'il existe un chemin du sommet s vers le sommet t dans le graphe.
2. Écrire une fonction qui prend en argument un graphe non orienté et qui détermine si le graphe est connexe.

Exercice 7 — Plus court chemin

Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté. Soient s et t deux sommets du graphe $\mathcal{G}$.

- ★ S'il existe un chemin allant du sommet s vers le sommet t , la longueur du plus court chemin allant de s à t est appelée la **distance** du sommet s au sommet t .
- ★ Sinon, on dit que la **distance** du sommet s au sommet t est infinie.

1. Écrire une fonction qui prend en arguments un graphe orienté et un sommet s du graphe, et qui renvoie la liste des distances du sommet s à chacun des sommets du graphe (on remplacera ici les distances infinies par -1).

*On pourra adapter le parcours en largeur vu en cours en remplaçant la liste **Marqués** par une liste qui contiendra les distances du sommet s à chaque sommet.*

2. Écrire une fonction qui prend en arguments un graphe orienté et un sommet s du graphe, et qui renvoie un dictionnaire dont les clés sont les sommets et dont les valeurs sont des listes représentant un plus court chemin du sommet s vers la clé.